NOTE SULLE EQUAZIONI DELLE VIBRAZIONI SONORE

G. Martinelli

Abstract

Questi appunti costituiscono un sommario delle principali formule relative delle vibrazioni elastiche

1 Un modelllo per una corda vibrante

Immaginiamo che la corda sia costituita da un insieme di N atomi interagenti, di massa m, disposti in sequenza, i quali, in posizione di equilibrio, occupino posizioni equidistanziate. Se chiamiamo a il passo reticolare, ovverosia la distanza all'equilibrio tra due atomi successivi, la coordinata di dell'i-esimo atomo sarà data da

$$x_i(t) = i\,a + \eta_i(t)\,, \qquad i = 1, \dots N$$
$$\dot{x}_i(t) \equiv \frac{dx_i(t)}{dt} = \dot{\eta}_i(t)\,, \qquad p_i = m\dot{\eta}_i(t)\,, \tag{1}$$

dove $\eta_i(t)$ rappresenta lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio e p_i l'impulto dell'i-esimo atomo. L'Hamiltoniana del sistema sarà data da

$$H = \sum_{i=1,N} \frac{p_i^2(t)}{2m} + V(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)\,, \tag{2}$$

dove $V(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$ è il potenziale di interazione tra gli atomi. Sviluppando il potenziale intorno alla posizione di equilibrio, corrispondente al minimo del potenziale

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_i}|_{\vec{\eta}=0} = 0\,, \tag{3}$$

si ottiene

$$H = \sum_{i=1,N} \frac{p_i^2(t)}{2m} + \sum_{i,j=1,N} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i \partial \eta_j}|_{\vec{\eta}=0}\, \eta_i\, \eta_j\,. \tag{4}$$

Per semplicità assumiamo che l'interazione scemi abbastanza rapidamente con la distanza, da poter trascurare l'interazione di atomi che non siano "primi vicini", e che valga l'invarianza per traslazioni, ovverosia che il potenziale dipenda solo dalla distanza relativa tra gli atomi. Senza perdita di generalità possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1,N} \frac{p_i^2(t)}{2m} + \sum_{i=1,N} \frac{K}{2} \left(\eta_i - \eta_{i+1}\right)^2 \,, \\ \mathcal{L} &= \sum_{i=1,N} \frac{m\dot{\eta}_i^2(t)}{2} - \sum_{i=1,N} \frac{K}{2} \left(\eta_i - \eta_{i+1}\right)^2 \,, \end{aligned} \tag{5}$$

Le equazioni del moto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \,, \tag{6}$$

danno

$$m\,\ddot{\eta}_i = K\left[(\eta_{i+1} - \eta_i) - (\eta_i - \eta_{i-1})\right] \,. \tag{7}$$

Ora siamo pronti a studiare il limite del continuo, $a \to 0$, del modello. Fisicamente questo corrisponde a misurare il comportamento della corda vibrante a distanze molto più grandi del passo reticolare. In questo limite, possiamo definire un campo scalare, che rappresenta la deformazione della corda in x, al tempo t, $\eta(x,t)$ e introdurre le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} &\eta_i(t) \to \eta(x,t)\,, \quad \dot{\eta}_i(t) \to \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\,, \quad \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \to \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}\,, \\ &\frac{m}{a} \to \mu\,, \quad K a \to Y\,, \quad a \sum_i \to \int dx\,, \end{aligned} \tag{8}$$

dove abbiamo introdotto la densità lineare di massa, μ, e la costante elastica di Young, Y. In termini di queste quantità, l'Hamiltoniana e la lagrangiana possono essere scritte come

$$\begin{aligned} H &= \int dx \left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{Y}{2}\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] \,, \\ \mathcal{L} &= \int dx \left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \frac{Y}{2}\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] \,, \end{aligned} \tag{9}$$

e le equazioni del moto diventano

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=x,t} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial \eta / \partial x_\nu} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} = 0\,, \\ \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

2 Equazione delle onde in un mezzo continuo e sua soluzione

$$\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2\vec{\eta}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{\eta} = 0\,, \tag{11}$$

dove

$$\vec{\eta} \equiv \left(\eta_x\left(\vec{x},t\right), \eta_y\left(\vec{x},t\right), \eta_z\left(\vec{x},t\right)\right)\,. \tag{12}$$

è l'intensità della vibrazione e $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. L'equazione delle onde è un equazione lineare in $\vec{\eta}$, questo significa che se ho trovato due soluzioni $\vec{\eta}_1$ e $\vec{\eta}_1$ che soddisfano l'equazione delle onde, qualunque combinazione lineare della forma $\vec{\eta} = C_1\vec{\eta}_! + C_2\vec{\eta}_2$ è ancora soluzione.

Per semplicità di esposizione, limitiamoci al caso unidimenzionale in cui $\eta = \eta(x,t)$ è una funzione scalare della posizione x e del tempo t e l'equazione delle onde semplicemente

$$\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0\,. \tag{13}$$

Se consideriamo ora una soluzione armonica del tipo

$$\eta(x,t) = h_q(t)\, e^{iqx} \tag{14}$$

allora $h_q(t)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d^2h_q}{dt^2} + \omega_q^2\, h_q = 0\,, \tag{15}$$

con $\omega_q^2 = v_s^2 q^2$, la cui soluzione ha la forma

$$h_q(t) = h_q^+(0)\, e^{-i\omega_q t} + h_q^-(0)\, e^{+i\omega_q t}\,, \tag{16}$$

dove $\omega_q = \sqrt{v_s^2q^2} = |v_s q|$ è la radice positiva della relazione precedente. In totale abbiamo dunque

$$h_q(t) = h_q^+(0)\, e^{i(qx-\omega_q t)} + h_q^-(0)\, e^{i(qx+\omega_q t)}\,. \tag{17}$$

I due termini rappresentano rispettivamente un'onda piana propagantesi nella direzione positiva o negativa dell'asse x, con velocità v_s, lunghezza d'onda $\lambda_q = 2\pi/q$ e frequenza ω_q. Naturalmente se abbiamo trovato due soluzioni armoniche $h_{q_1}(t)$ e $h_{q_2}(t)$ anche la loro somma sarà soluzione dell'equazione delle onde. In generale la somma arbitraria di soluzioni di questo tipo è ancora soluzione e, essendo il parametro q un parametro reale, possiamo addirittura definire una soluzione che sia l'integrale su q di soluzioni armoniche

$$\eta(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi}\left(h_q^+\, e^{i(qx-\omega_q t)} + h_q^-\, e^{i(qx+\omega_q t)}\right), \tag{18}$$

dove il fattore 2π è stato messo per comodità.

Consideriamo ora nell'integrale tutti i termini che corrispondono alla stessa frequenza

$$\eta_q(x,t) = \left(h_q^+ \, e^{iqx} + h_{-q}^- \, e^{-iqx}\right) \, e^{-i\omega_q t} + \left(h_q^- \, e^{iqx} + h_{-q}^+ \, e^{-iqx}\right) \, e^{i\omega_q t} \, , \tag{19}$$

e imponiamo anzitutto che $\eta_q(x,t)$ sia una quantità reale ovvero

$$\eta_q(x,t) = \eta_q^*(x,t) = \left(h_q^{+\,*} \, e^{-iqx} + h_{-q}^{-\,*} \, e^{iqx}\right) \, e^{i\omega_q t} + \left(h_q^{-\,*} \, e^{-iqx} + h_{-q}^{+\,*} \, e^{iqx}\right) \, e^{-i\omega_q t} \, , \tag{20}$$

da cui

$$h_{-q}^{+\,*} = h_q^+ \, , \qquad h_{-q}^{-\,*} = h_q^- \, . \tag{21}$$

Ora imponiamo le condizioni al contorno, imponendo che $\eta_q(x=0,t) = \eta_q(L,t) = 0$. Cominciamo con la prima condizione

$$\eta_q(0,t) = \left(h_q^+ + h_{-q}^-\right) \, e^{-i\omega_q t} + \left(h_q^- \ + h_{-q}^+\right) \, e^{i\omega_q t} = 0 \, , \tag{22}$$

a ogni tempo, dunque $h_q^+ = -h_{-q}^-$ e $h_q^- \ = -h_{-q}^+$, ovvero

$$\begin{aligned} \eta_q(x,t) &= h_q^+ \, \left(e^{iqx} - e^{-iqx}\right) \, e^{-i\omega_q t} + h_{-q}^+ \, \left(e^{-iqx} - \, e^{iqx}\right) \, e^{i\omega_q t} \\ &= h_q^+ \, \left(e^{iqx} - e^{-iqx}\right) \, e^{-i\omega_q t} + h_q^{+\,*} \, \left(e^{-iqx} - \, e^{iqx}\right) \, e^{i\omega_q t} \\ &\propto \sin qx \, . \end{aligned} \tag{23}$$

La condizione che l'ampiezza si annulli in $x = L$ significa dunque che $q = n\pi/L$ dove n è un intero, $n = 1, 2, \ldots$. Scrivendo $h_q^+ = |h_q^+| e^{i\phi_q}$ e utilizzando la (21) abbiamo

$$\begin{aligned} \eta_q(x,t) &= |h_q^+| \left[\left(e^{iqx} - e^{-iqx}\right) \, e^{-i(\omega_q t - \phi_q)} + \left(e^{-iqx} - \, e^{iqx}\right) \, e^{i(\omega_q t - \phi_q)}\right] \\ &= A_q \, \sin qx \, \sin(\omega_q t - \phi_q) = A_q \, \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \, \sin(\omega_q t - \phi_q) \, . \end{aligned} \tag{24}$$