

# NOTE SULL'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI E IL LIMITE SEMICLASSICO DELLA MECCANICA QUANTISTICA

G. Martinelli

## Abstract

Questi appunti costituiscono un sommario delle principali formule relative all'equazione di Hamilton-Jacobi e al limite semiclassico della meccanica quantistica.

## 1 Lagrangian equations and the principle of minimal action

Let us take a system of  $N$  point particles, the coordinates of which,  $\vec{r}_i$  can be expressed in terms of  $3N - k$  independent variables  $q_j$ , because of the constraints existing on the particles (e.g. for a rigid body  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = d_{ij}^2$ )

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t), \quad (1)$$

then it can be shown that the equation of motion can be written as

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = 0, \quad (2)$$

where  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N-k}, q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$  is called Lagrangian and

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

is called the canonical momentum. In the simplest cases, where for example there are no constraints the  $q_i$  can be identified with the normal coordinates.

Let us take for example a single particle of mass  $m$  in the presence of an external potential which depends on the coordinate,  $\vec{r} = (x, y, z) = (q_1, q_2, q_3)$ ,  $V(\vec{r}) =$

$V(q_1, q_2, q_3)$ , and  $\mathcal{L} = T - V$  where  $T$  is the kinetic energy and  $V$  the potential energy

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V(q_1, q_2, q_3). \quad (3)$$

We obtain

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = m\ddot{q}_i = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i. \quad (4)$$

There is an ambiguity in defining  $\mathcal{L}$ . Show that the equations of motions remain the same if we replace  $\mathcal{L}$  with

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}, \quad (5)$$

where  $F = F(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$  is an arbitrary differentiable function of the coordinates  $q_i$  and of time.

We now derive the Lagrangian equations from a variational principle. Let us define the quantity

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N-k}, q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t). \quad (6)$$

The Hamilton principle is that the time evolution of my system is such that the variation of the line integral  $S$  for fixed  $t_1$  and  $t_2$  (and initial and final conditions on the trajectories) is zero, namely

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N-k}, q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) = 0. \quad (7)$$

The variation can be computed by adding to a trajectory  $q_i = q_i(t)$  an infinitesimal variation  $\delta q_i(t)$ , which satisfies the condition  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ . We also have

$$\delta \dot{q}_i(t) = \delta \frac{d}{dt} q_i(t) = \frac{d}{dt} \delta q_i(t).$$

We are ready to compute the variation of eq. (7)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d \delta q_i}{dt} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

The last term in eq. (8) gives zero contribution since it can be integrated between the extremes and  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ . Since the variation of the trajectory is arbitrary, not only the integral, but the integrand must be zero, thus demonstrating that the Lagrangian equations can be derived from a variational principle. The ambiguity in the definition of the Lagrangian corresponds to adding to the action a constant the variation of which vanishes.

We are now ready to discuss the Lagrangian of a pointlike charged particle of mass  $m$  and charge  $e$  which experiences the force due to an electric and a magnetic field (Lorentz force)

$$\vec{F} = e \left[ \vec{E} + \left( \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \right], \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{c \partial t}, \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{aligned} \quad (10)$$

The Lagrangian can be written as

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} - e \phi + e \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}. \quad (11)$$

By computing the  $x$ -component of the equations of motion

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_x &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] = \frac{d}{dt} \left[ m \dot{x} + \frac{e}{c} A_x \right] \\ &= m \ddot{x} + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \right) + \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -e \vec{\nabla}_x \phi + \frac{e}{c} \left( v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

we verify that it corresponds to the  $x$ -component of the Lorentz force. Note that the canonical momentum is not the mechanical momentum, because there is an extra term given by the vector potential

$$\vec{p} = m \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (13)$$

There is certainly a large arbitrariness in the choice of the variables  $q_i$ . Let us imagine that we have chosen a system of variables such that the Lagrangian does not depend on one of them,  $Q_k$  say (in this case  $Q_k$  is said a cyclic variable). Then we have

$$\frac{dP_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_k} \right) = 0, \quad (14)$$

namely  $P_k = \text{“constant”}$  is a conserved quantity which does not vary in time.

As an example, let us consider a one dimensional system of two particles, with mass  $m_1$  and  $m_2$ , attracting each other with a harmonic potential

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{q}_2^2 - \kappa(q_1 - q_2)^2. \quad (15)$$

We can introduce as variables the center of mass and reduced mass coordinates

$$\begin{aligned} Q &= \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2}, & P &= M \dot{Q} = (m_1 + m_2) \dot{Q}, \\ q &= q_1 - q_2, & p &= \mu \dot{q} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{q}. \end{aligned} \quad (16)$$

In terms of the new variables the lagrangian reads

$$\mathcal{L} = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} - \frac{\mu\omega^2}{2} q^2, \quad (17)$$

where  $\kappa = \mu\omega^2/2$ . Since  $Q$  is a cyclic variable,  $P = \text{const.}$ , that is the center of mass moves with constant speed  $V = P/M$  while the two particles oscillate around its position with frequency  $\omega$ .

The conservation of the total momentum is due to the invariance of the Lagrangian with respect to translations ( $q_i \rightarrow q_i + \Delta$ ). There is a general theorem (Nöther theorem) which states that for any continuous transformation which leaves the Lagrangian invariant there is a conserved quantity (translations  $\rightarrow$  total momentum, rotations  $\rightarrow$  total angular momentum, time translations  $\rightarrow$  total energy, “gauge” transformations  $\rightarrow$  total electric charge).

## 2 Hamilton equations of motion and the Hamiltonian

As the Newton equation, the Lagrangian approach consists in a system of second order equations in time. There is an alternative formulation which is instead based on a system of first order equations and is completely equivalent to the Lagrangian case. This will be discussed in this section.

The independent variables in the Lagrangian are the coordinates,  $q_i$ , their time derivative  $\dot{q}_i$  and the time

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (18)$$

since, by the Lagrangian equations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i.$$

We now introduce the Hamiltonian which is generated by the Legendre transformation

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(q_i, p_i, t) &= \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \\ d\mathcal{H} &= d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i - d\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \\ &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt.\end{aligned}\tag{19}$$

On the other hand

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt,\tag{20}$$

, from which we obtain the Hamilton equations

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{21}$$

Verify that in the example of eq. (17) the Hamiltonian is given by

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} q^2,\tag{22}$$

which is positive definite, and the Hamilton equations are

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{P}{M}, & \dot{P} &= 0, \\ \dot{q} &= \frac{p}{\mu}, & \dot{p} &= -\mu\omega^2 q \rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q,\end{aligned}\tag{23}$$

which are the equations of the harmonic oscillator. In this particular case, but is not always like that, the Hamiltonian, for assigned values of the variables obeying to the equations of motions, coincides with the energy. Show that if the Hamiltonian does not depend explicitly on the time than

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0,\tag{24}$$

i.e. the energy is conserved. This obviously happens when the Hamiltonian is invariant under the transformation  $t \rightarrow t + \Delta t$ .

### 3 Trasformazioni canoniche e equazione di Hamilton-Jacobi

Si consideri un sistema Hamiltoniano descritto da un insieme di coordinate,  $q_i$ , e momenti coniugati,  $p_i$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (25)$$

Sia data una trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_i, p_i, t) \\ P_i &= P_i(q_i, p_i, t), \end{aligned} \quad (26)$$

tali che

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (27)$$

Le trasformazioni in questione si chiamano “canoniche”.

Le nuove coordinate “canoniche” devono soddisfare un principio variazionale

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \sum_i P_i \frac{dQ_i}{dt} - K(Q_i, P_i, t) \right) = 0, \quad (28)$$

come del resto le coordinate originali

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \sum_i p_i \frac{dq_i}{dt} - H(q_i, p_i, t) \right) = 0. \quad (29)$$

Questo significa che gli integrandi possono differire solo per la derivata totale di una funzione  $F$  rispetto al tempo, il cui integrale

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{dF}{dt} = F(t_f) - F(t_i) \quad (30)$$

ha variazione nulla, perchè la variazione si annulla agli estremi. Nel seguito considereremo solo il caso in cui  $F = F(q_i, P_i, t)$

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \frac{dq_i}{dt} - H(q_i, p_i, t) &= \sum_i P_i \frac{dQ_i}{dt} - K(Q_i, P_i, t) + \frac{dF}{dt} \\ &= -\sum_i Q_i \frac{dP_i}{dt} - K(Q_i, P_i, t) + \frac{dF'}{dt}. \end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{dF'}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial F'}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F'}{\partial P_i} \frac{dP_i}{dt} \right) + \frac{\partial F'}{\partial t} \quad (32)$$

Uguagliando i coefficienti di  $dq_i/dt$  e  $dP_i/dt$ , essendo  $q_i$  e  $P_i$  variabili indipendenti, otteniamo

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F'}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F'}{\partial P_i} \\ K &= H + \frac{\partial F'}{\partial t}. \end{aligned} \quad (33)$$

Nel seguito chiameremo  $F'$  semplicemente  $F$ . Tra tutte le trasformazioni possibili, cerchiamo quelle per le quali le variabili canoniche siano espresse semplicemente in termini di costanti del moto, ovvero dei loro valori all'istante iniziale

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_i^0, p_i^0, t) \\ p_i &= p_i(q_i^0, p_i^0, t). \end{aligned} \quad (34)$$

Questo implica che tutte le nuove variabili sono cicliche e soddisfano le equazioni del moto

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0. \quad (35)$$

Questo si può ottenere imponendo che la nuova Hamiltoniana  $K$  sia identicamente nulla, ovvero, dalla prima e terza delle (33)

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = H\left(q_i, \frac{\partial F}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (36)$$

Questa equazione differenziale per la funzione  $F$  viene chiamata equazione di Hamilton-Jacobi e la soluzione, denominata “funzione principale di Hamilton” è indicata come  $S = F(q_i, P_i, t)$  nella notazione usuale. Poiché le  $P_i = \alpha_i$  sono costanti del moto, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_i \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial S}{\partial P_i} \frac{dP_i}{dt} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \frac{dq_i}{dt} - H = L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right). \end{aligned} \quad (37)$$

La funzione di Hamilton, o azione, è dunque definita come

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right) + \text{cost.} \quad (38)$$

e l'equazione variazionale (29) non è altri che il principio di minima azione.

Un caso di particolare importanza è quello in cui l'Hamiltoniana non dipende dal tempo. Di solito  $H$  rappresenta l'energia  $E$  del sistema ed è a questa situazione che ci riferiremo nel seguito. L'equazione di Hamilton-Jacobi (36)

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (39)$$

ha come soluzione un'azione con una dipendenza dal tempo banale ovvero

$$S(q_i, P_i, t) = S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - Et, \quad (40)$$

con

$$E = H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right). \quad (41)$$

Consideriamo a titolo di esempio l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \quad (42)$$

corrispondente all'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (43)$$

Abbiamo dunque

$$S(q, E, t) = W(q, E) - Et, \quad (44)$$

con

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E, \quad (45)$$

da cui

$$S = m\omega \int dq \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2} - Et \quad (46)$$

In generale se l'Hamiltoniana ha la forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad (47)$$

si ha

$$S = \int dq \sqrt{2m(E - V(q))} - Et. \quad (48)$$



## 4 Limite semiclassico della meccanica quantistica

Consideriamo l'equazione di Schrödinger per lo stato stazionario di una particella puntiforme in presenza di un potenziale esterno

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x}) = (E - V(\vec{x}))\psi(\vec{x}). \quad (49)$$

Scriviamo la funzione d'onda separando il modulo e la fase

$$\psi(\vec{x}) = \sqrt{\rho(\vec{x})}e^{iS(\vec{x})/\hbar}, \quad |\psi(\vec{x})|^2 = \rho(\vec{x}), \quad (50)$$

e ricaviamo l'equazione in termini di  $M(\vec{x}) = \sqrt{\rho(\vec{x})}$  e  $S(\vec{x})$

$$\begin{aligned} M(\vec{x})(\vec{\nabla}S(\vec{x}))^2 - i\hbar M(\vec{x})\nabla^2S(\vec{x}) - 2i\hbar\vec{\nabla}M(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}S(\vec{x}) \\ - \hbar^2\nabla^2M(\vec{x}) = 2m(E - V(\vec{x}))M(\vec{x}). \end{aligned} \quad (51)$$

Il limite classico si ottiene quando  $\hbar \rightarrow 0$

$$(\nabla S(\vec{x}))^2 = 2m(E - V(\vec{x})). \quad (52)$$

che è proprio l'equazione di Hamilton-Jacobi per l'azione  $S$ . D'altro canto, all'ordine  $\hbar$  abbiamo

$$\hbar [M(\vec{x})\nabla^2S(\vec{x}) + 2\nabla M(\vec{x})\nabla S(\vec{x})] = 0. \quad (53)$$

Ci limitiamo qui a risolvere il problema unidimensionale

$$\begin{aligned} M(x)\frac{d^2S(x)}{dx^2} + 2\frac{dM(x)}{dx}\frac{dS(x)}{dx} = 0 \rightarrow \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{dS(x)}{dx}\right) + \ln(M(x))\right) = 0 \rightarrow \\ \ln\left(\frac{M(x)}{C}\right) = -\ln\left(\frac{dS(x)}{dx}\right)^{1/2} \rightarrow \\ M(x) = \frac{C}{\left(\frac{dS(x)}{dx}\right)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (54)$$

dove  $C$  è una costante di integrazione arbitraria. Dunque la funzione d'onda ha la forma

$$\psi(x) = \frac{C}{p(x)^{1/2}} \exp\left(\pm i \int^x dx' p(x')/\hbar\right), \quad (55)$$

con  $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$  e

$$\psi(x, t) = \frac{C}{p(x)^{1/2}} \exp\left[\left(\pm i \int^x dx' p(x')/\hbar - iEt\right)/\hbar\right] \sim e^{iS/\hbar}, \quad (56)$$

## 5 Effetto Tunnel, decadimenti $\alpha$ e microscopio elettronico

Consideriamo di nuovo l'ampiezza di transizione della barriera di potenziale nel caso  $E < U_0$

$$T(E, L) = \frac{e^{-ikL}}{\cosh(k'L) + \frac{1}{2i} \left( \frac{k^2 - k'^2}{kk'} \right) \sinh(k'L)} \quad (57)$$

e la corrispondente probabilità di transizione

$$P_T(E, L) = |T(E, L)|^2 = \frac{1}{1 + \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{k^2 - k'^2}{kk'} \right)^2 \right] \sinh^2(k'L)}. \quad (58)$$

Nel limite di una barriera molto larga, o molto alta,  $k'L \gg 1$ , possiamo approssimare il seno iperbolico con un esponenziale  $\sinh(k'L) \sim 1/2 \exp(k'L)$ . In questo limite abbiamo

$$\begin{aligned} P_T(E, L) &\sim \frac{16 (kk')^2}{(k^2 + k'^2)^2} e^{-2k'L} \\ &= \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2L\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar}. \end{aligned} \quad (59)$$

Dunque, nel caso quantistico, la particella ha una probabilità finita, benchè esponenzialmente soppressa, di passare la barriera di potenziale. Possiamo riscrivere  $P_T(E, L)$  nel seguente modo

$$P_T(E, L) = e^{-2L\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar + \ln\left(\frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2}\right)}. \quad (60)$$

Per una barriera di potenziale continua  $U(x)$ , possiamo calcolare la probabilità di transizione da un punto  $x_i$  a un punto  $x_f$ , dividendo l'intervallo  $x_f - x_i$  in  $N$  gradini di larghezza  $L = \Delta x$  all'interno dei quali si può considerare il potenziale costante. Alla fine manderemo  $N \rightarrow \infty$  e  $\Delta x \rightarrow 0$  con  $N\Delta x = x_f - x_i = \text{finito}$ . Trascurando in eq. (60) il contributo del logaritmo, che varia molto più lentamente dell'esponenziale, otteniamo

$$\begin{aligned} P_T(E, x_i \rightarrow x_f) &= \prod_{k=1}^N e^{-2\Delta x \sqrt{2m(U(x_k) - E)}/\hbar} \\ e^{-2\Delta x \sum_{k=1}^N \sqrt{2m(U(x_k) - E)}/\hbar} &\rightarrow e^{-2 \int_{x_i}^{x_f} dx \sqrt{2m(U(x) - E)}/\hbar}. \end{aligned} \quad (61)$$

Non è difficile riconoscere che abbiamo ottenuto esattamente il risultato semiclassico derivato nella sezione precedente, trascurando la variazione di  $p(x)^{-1/2}$  nella regione di variazione del potenziale.

Applichiamo le formule che abbiamo derivato al decadimento  $\alpha$  di un nucleo. Sebbene il problema sia intrinsecamente tridimensionale, gli aspetti salienti possono essere derivati nel caso unidimensionale. All'interno del nucleo di carica  $Z_N + 2$  agiscono delle forze attrattive a raggio cortissimo,  $R \sim 10^{-12}$  cm, e le forze repulsive coulombiane tra i protoni. Approssimiamo dunque il potenziale a cui è soggetta una particella  $\alpha$ , che è un nucleo di elio di carica  $Z_\alpha = 2$ , come una buca di potenziale combinata a un potenziale che decresce come  $1/r$  ( $r > 0$ )

$$U(r) = -U_0\theta(R - r) + \frac{Z_N Z_\alpha e^2}{r} f(r), \quad (62)$$

dove  $f(r)$  è il fattore di forma elettromagnetico che soddisfa le condizioni  $f(0) = 0$  e  $f(r > R) = 1$ . Se la particella  $\alpha$  ha un'energia  $E$ , il punto di inversione del moto classico, quando cioè l'impulso diventerebbe immaginario, è dato dalla relazione (per  $r > R$ )

$$E = \frac{Z_N Z_\alpha}{r^*}. \quad (63)$$

Se la particella, per effetto tunnel, può uscire dalla buca e arrivare a  $r^*$ , a quel punto può continuare il moto nella zona permessa classicamente, senza ulteriori soppressioni esponenziali, e scappare a una distanza infinita dal nucleo originario, che dunque si è disintegrato. Calcoliamo dunque, usando la formula (61), la probabilità per la particella di andare da  $R$  a  $r^*$ , a partire dall'argomento  $\mathcal{A}$  dell'esponenziale

$$\mathcal{A} = \frac{2}{\hbar} \int_R^{r^*} dr \sqrt{2m(U(r) - E)} = \frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_R^{r^*} dr \sqrt{r^*/r - 1} \quad (64)$$

Il risultato dell'integrale è

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar} (r^* - R) \times \\ & \left[ \frac{\sqrt{r^*/R - 1} \left( \sqrt{r^*/R - 1} + r^*/R \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{r^*/R - 1}} \right) \right)}{(r^*/R - 1)^{(3/2)}} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{r^*}{R} \right) \frac{1}{r^*/R - 1} \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Nel limite  $r^* \gg R$ , ricordando che  $r^* = Z_N Z_\alpha e^2 / E$  otteniamo

$$\mathcal{A} = 2\sqrt{\frac{2m}{E}} \frac{Z_N Z_\alpha e^2}{\hbar} \left( \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{r^*}} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{R}{r^*} \right). \quad (66)$$

La probabilità di transizione per unità di tempo è data dall'espressione

$$\frac{dP}{dt} = \frac{v}{2R} e^{-\mathcal{A}}, \quad (67)$$

essendo  $T = 2R/v$  il tempo che intercorre tra due passaggi della particella nel punto di coordinate  $R$  dal centro del nucleo. Ovviamente abbiamo

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{dP}{dt}N = -\frac{1}{\tau}N, \quad (68)$$

la cui soluzione è

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau}. \quad (69)$$

La dipendenza della vita media  $\tau$  dall'energia  $E$  della particella è spaventosa in quanto compare nell'esponenziale in eq. (67).

Per avere un'idea dei numeri poniamo  $R = 1.5 \times 10^{-13} A^{1/3} \sim 2.2 \times 10^{-13} Z_N^{1/3}$  cm, dove  $A$  è il numero atomico,  $\hbar = 1.0546 \times 10^{-27}$  erg sec,  $e = 4.80324 \times 10^{-10}$  esu,  $m \sim 4 m_{\text{proton}} = 4 \times 1.67 \times 10^{-24}$  gr,  $v \sim \pi\hbar/(mR)$  (si ricordi che 1 erg =  $6.58 \times 10^5$  MeV). In questo caso otteniamo la seguente espressione per il logaritmo del tempo di dimezzamento  $T$

$$\text{Log}_{10}(T)(\text{Years}) = -29.969 + 1.72 \frac{Z_N}{\sqrt{E(\text{MeV})}} - 1.92 Z^{2/3} \quad (70)$$

il cui disegno è riportato in figura 2. Come si può osservare al variare dell'energia il tempo di dimezzamento cambia da  $10^{10}$  a  $10^{-10}$  anni (cioè 3 millesimi di secondo) !!!

Fusione nucleare

