L'integrale della funzione di Planck per la radiazione di corpo nero

1 Il problema

Studiando il corpo nero con l'approccio di Planck si ottiene che la densità di energia per unità di volume è

$$dU = u(\omega)\, d\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1} \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} d\omega$$

o anche, definendo $\theta = \hbar\omega / KT$ si può riscrivere il dU

$$dU = u(\theta)\, d\theta = \frac{(KT^4)}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \frac{1}{e^{\theta} - 1} \theta^3\, d\theta$$

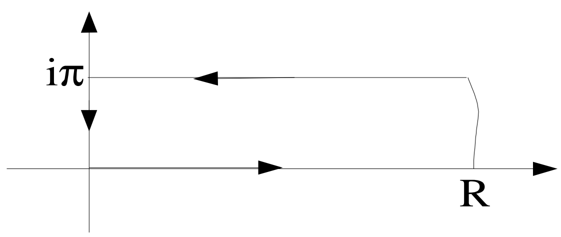
Ovviamente integrando il dU su tutte le frequenze si deve ottenere la formula di Wien $U = \sigma T^4$
Vediamo come arrivarvi analiticamente.

2 L'integrale

A meno di costanti particolari il problema si riduce al calcolo dell'integrale

$$I_3 = \int_0^{\infty} d\theta \frac{\theta^3}{e^{\theta} - 1}$$

Questo integrale si può calcolare facendo un'integrazione nel piano complesso sul percorso indicato in figura:



E' tuttavia opportuno fare dapprima alcune notazioni:

- La funzione $\dfrac{z^k}{e^z - 1}$ *è analitica* $\forall\, k \geq 1$ e quindi l'integrale sul percorso in figura sarà nullo per il teorema di Cauchy-Goursat

- Si dimostra l'utile identità $\displaystyle\int_0^{\infty} dx \frac{x^n}{e^x + 1} = (1 - 2^{-n}) \int_0^{\infty} dx \frac{x^n}{e^x - 1}$ (*)

  Infatti: $$\int_0^{\infty} dx \left(\frac{x^n}{e^x - 1} - \frac{x^n}{e^x + 1} \right) = \int_0^{\infty} dx \frac{2 x^n}{e^{2x} - 1} = 2^{-n} \int_0^{\infty} dy \frac{y^n}{e^y - 1}$$

ove per ottenere l'ultima uguaglianza è stato fatto il cambio di variabile y=2x. Poiché y è semplicemente una variabile di integrazione possiamo facilmente combinare il primo ed il terzo membro dell'equazione scritta ottenendo la relazione voluta.

Procediamo ora con il calcolare il valore dell'integrale $I_1=\int_0^\infty dx\frac{x}{e^x-1}$ per analizzare la procedura con cui poi affrontare l'integrale della funzione di Planck. Integrando sul cammino in figura si ottiene:

$$\int_0^\infty dx\frac{x}{e^x-1}+O(e^{-R})+\int_\infty^0 dx\frac{x+i\pi}{e^{x+i\pi}-1}+\int_\pi^0 idy\frac{iy}{e^{iy}-1}=0$$

$$\int_0^\infty dx\frac{x}{e^x-1}+\int_0^\infty dx\frac{x+i\pi}{e^x+1}=\int_0^\pi idy\frac{iy}{e^{iy}-1}$$

Consideriamo ora il termine a secondo membro e moltiplichiamo dentro l'integrale sia a numeratore che a denominatore per la quantità (e^{-iy}-1). In tal modo al denominatore otteniamo la quantità 2(1-cos(y)).
Poiché il risultato dell'integrale sarà un numero complesso avremo che le parti reali e immaginarie dovranno essere uguali a destra e sinistra del segno di uguaglianza. In particolare studiamo la parte reale:

$$\int_0^\infty dx\frac{x}{e^x-1}+\int_0^\infty dx\frac{x}{e^x+1}=\int_0^\pi dy\frac{y(1-\cos(y))}{2(1-\cos(y))}=\frac{\pi^2}{4}$$

sfruttando al relazione (*) si ottiene: $I_1=\int_0^\infty dx\frac{x}{e^x-1}=\frac{\pi^2}{6}$

In maniera del tutto analoga calcoliamo $I_3=\int_0^\infty dx\frac{x^3}{e^x-1}$:

$$\int_0^\infty dx\frac{x^3}{e^x-1}+O(e^{-R})+\int_\infty^0 dx\frac{(x+i\pi)^3}{e^{x+i\pi}-1}+\int_\pi^0 idy\frac{(iy)^3}{e^{iy}-1}=0$$

$$\int_0^\infty dx\frac{x^3}{e^x-1}+\int_0^\infty dx\frac{(x+i\pi)^3}{e^x+1}=\int_0^\pi idy\frac{(iy)^3}{e^{iy}-1}$$

procedendo come prima (e considerando la sola parte reale) si avrà

$$\int_0^\infty dx\frac{x^3}{e^x-1}+\int_0^\infty dx\frac{x^3-3\pi^2x}{e^x+1}=-\int_0^\pi dy\frac{y^3}{2}=-\frac{\pi^4}{8}$$

e sfruttando le relazioni (*) e $I_1=\frac{\pi^2}{6}$ posso ottenere

$$I_3 = \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

3 Conclusione

Una volta calcolato l'integrale possiamo quindi giungere alla formula per l'energia totale del corpo nero. Tale relazione è del tutto in accordo con la legge di Wien.
In particolare:

$$U = \frac{K^4 \pi^2}{15 c^3 \hbar^3} T^4 = \sigma T^4$$

e pertanto $\sigma = \frac{K^4 \pi^2}{15 c^3 \hbar^3}$, relazione facilmente verificabile sostituendo i valori numerici delle varie costanti in gioco.