

NOTE SULLE EQUAZIONI DI MAXWELL E IL CORPO NERO

G. Martinelli

Abstract

Questi appunti costituiscono un sommario delle principali formule relative alla trattazione del corpo nero.

1 Le Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell nel vuoto, nel sistema di unità di Gauss, sono date dalle espressioni

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi \vec{j}}{c} \quad (2)$$

Derivando la prima delle eq. (2) rispetto al tempo, prendendo la divergenza della seconda ($\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$), e combinando i risultati di queste operazioni, si ottiene l'equazione di conservazione della carica elettrica di un sistema.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (3)$$

L'equazione (3) ci dice che la carica totale

$$Q(t) = \int d^3x \rho(x, t) \quad (4)$$

è una costante del moto, $dQ(t)/dt = 0$.

Le eq. (1) sono indipendenti dalla distribuzione di cariche e correnti del sistema in esame. Per qualunque sistema, dunque, dalla prima delle eq. (1), essendo possibile dimostrare che un vettore che abbia divergenza nulla può sempre essere scritto come rotore, possiamo introdurre il potenziale vettore, definito dalla relazione

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5)$$

Sostituendo la (5) nella seconda delle eq. (1) otteniamo

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0. \quad (6)$$

La quantità in parentesi può essere scritta come il gradiente di uno scalare, in quanto il rotore di un gradiente è sempre nullo

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (7)$$

da cui

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (8)$$

Il campo elettrico \vec{E} e il campo magnetico \vec{B} , che sono le quantità fisiche misurabili con esperienze in laboratorio, sono invarianti rispetto alle seguenti trasformazioni del potenziale vettore \vec{A} e del potenziale scalare ϕ

$$\vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t) \quad \phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t}, \quad (9)$$

dove $\Lambda(\vec{x}, t)$ è una arbitraria funzione dello spazio e del tempo.

Possiamo ora sostituire le eq. (5) e (8) nelle eq. (2). Utilizzando la relazione

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}, \quad (10)$$

otteniamo

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{4\pi \vec{j}}{c} \quad (11)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = 4\pi \rho \quad (12)$$

Possiamo ora utilizzare l'invarianza dei campi fisici rispetto alle trasformazioni (9) per imporre la condizione, detta “gauge di Lorentz”,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (13)$$

e ottenere

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi \vec{j}}{c} \quad (14)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{4\pi \rho}{c}. \quad (15)$$

2 Scalari e Vettori

In questa sezione discutiamo alcune nozioni generali su scalari e vettori rispetto a rotazioni nello spazio tridimensionale e trasformazioni di Lorentz.

2.1 Rotazioni

Consideriamo una rotazione nello spazio tridimensionale

$$\vec{x}' = O(\omega)\vec{x}, \quad (16)$$

dove il vettore ω definisce la direzione e l'intensità della rotazione

$$\omega \equiv |\omega|\vec{n} = |\omega|(\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta). \quad (17)$$

Sotto questa trasformazione (lineare e tale che $\det[O] = +1$), le componenti del vettore \vec{x} trasformano come

$$x_i = \sum_{j=1,3} O_{ij} x_j \quad (18)$$

e la matrice della trasformazione è una matrice ortogonale

$$O \cdot O^T = O^T \cdot O = 1 \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1,3} O_{ij}^T O_{jk} = \delta_{ik}. \quad (19)$$

La trasformazione in esame lascia invariante la quantità “scalare”

$$d = \sum_i x'_i x'_i = \sum_{i,j,k=1,3} O_{ij} x_j O_{ik} x_k = \sum_{j,k=1,3} x_j O_{ji}^T O_{ik} x_k = \sum_i x_i x_i. \quad (20)$$

Nel seguito ometteremo il simbolo di sommatoria, sottointendendo che indici ripetuti sono sommati.

Sia data una funzione del vettore posizione, $f(\vec{x})$, “scalare”, ovvero invariante per trasformazioni di coordinate. La funzione nel punto $\vec{x} = \vec{x}_0 + \delta\vec{x}$ assumerà il valore

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + df(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \mathcal{O}(\delta x^2). \quad (21)$$

$f(\vec{x})$ non può dipendere dal sistema di coordinate, ne segue che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = \vec{\nabla} f \cdot \vec{\delta} x \quad (22)$$

è un invariante (scalare). Dunque $\vec{\nabla}$ trasforma come un vettore.

Sotto una trasformazione tutti i vettori trasformano allo stesso modo, ad esempio per il campo elettrico \vec{E} e quello magnetico \vec{B} abbiamo

$$E_i = \sum_{j=1,3} O_{ij} E_j \quad B_i = \sum_{j=1,3} O_{ij} B_j. \quad (23)$$

La differenza tra i due campi è dovuta alle loro proprietà rispetto a una riflessione degli assi (rotazione impropria con $\det[O] = -1$) che ci fa passare da un sistema di riferimento sinistrorso a uno destrorso. Sotto questa trasformazione infatti

$$\vec{E} \rightarrow -\vec{E} \quad \vec{B} \rightarrow \vec{B}. \quad (24)$$

Per questa ragione il campo elettrico è un vettore e quello magnetico uno “pseudovettore”. Analogamente, rispetto a una riflessione degli assi uno scalare, come d definito in eq. (20), non cambia segno, mentre uno “pseudoscalare” cambia segno. Si dimostri che il momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ è uno pseudovettore e che $\vec{E} \cdot \vec{B}$ è uno pseudoscalare.

Anche nelle equazioni differenziali per una quantità scalare o vettoriale, tutti i termini che compaiono devono essere rispettivamente scalari o vettoriali. La prima equazione in (1) e la prima in (2) sono date rispettivamente dal prodotto scalare del vettore $\vec{\nabla}$ con \vec{B} o \vec{E} , ne segue che la densità di carica trasforma come una quantità scalare (ovvero è invariante) rispetto a una rotazione di coordinate. Per contro, la seconda equazione in (1) e la seconda in (2) dipendono dal prodotto vettoriale di $\vec{\nabla}$ con un vettore, o dalla derivata rispetto al tempo di un vettore che, essendo il tempo uno scalare, è ancora un vettore. Dunque queste sono equazioni vettoriali, e corrispondono a tre equazioni, una per ciascuna componente

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{B})_i - \frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial t} &= \frac{4\pi j_i}{c} \\ \epsilon_{ijk} \nabla_j B_k - \frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial t} &= \frac{4\pi j_i}{c} \end{aligned} \quad (25)$$

dove ϵ_{ijk} è il tensore antisimmetrico, $\epsilon_{123} = +1$, $\epsilon_{213} = -1$, etc., ed inoltre \vec{j} è un vettore, e trasforma come la posizione o il campo elettrico rispetto a una rotazione. Considerazioni analoghe possono essere fatte per i campi ϕ (campo scalare) e \vec{A} (campo vettoriale). La seconda equazione in (1) e la seconda in (2) non sono invarianti rispetto a una rotazione. Tuttavia, tutti i termini che vi compaiono ruotano con la stessa legge di trasformazione, e pertanto queste equazioni sono valide per i campi trasformati in tutti i sistemi di riferimento e si dicono covarianti.

2.2 Trasformazioni di Lorentz

Il quadrivettore posizione (covariante e controvariante) definito come

$$x_\mu \equiv (ct, x, y, z), \quad x^\mu \equiv g^{\mu\nu} x_\nu = (ct, -x, -y, -z), \quad (26)$$

sotto una trasformazione di Lorentz trasforma linearmente

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu. \quad (27)$$

A titolo esempio, per un riferimento che si muove lungo l'asse delle x con velocità v , si ha

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} & y' &= y & z' &= z & t' &= \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ x'_1 &= \frac{x_1 - x_0 \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} & x'_2 &= x_2 & x'_3 &= x_3 & x'_0 &= \frac{x_0 - x_1 \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \quad (28)$$

dove $x_0 = ct$ e $\beta = v/c$.

Le trasformazioni di Lorentz lasciano invarianti la quantità “scalare”

$$s = x^\mu x_\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \quad (29)$$

Con le medesime considerazioni fatte precedentemente, possiamo dimostrare che

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

è un vettore controvariante, in modo tale che il differenziale di uno scalare relativistico $f(x)$

$$df(x) = \partial^\mu f(x) dx_\mu$$

è a sua volta invariante per trasformazioni di Lorentz. Si noti che la quarta componente di un quadrivettore non è invariante rispetto a una trasformazione relativistica, ma è invariante rispetto a una rotazione nello spazio, dunque è uno scalare rispetto alle rotazioni. Inoltre la derivata di un vettore rispetto a uno scalare è ovviamente un vettore. Ad esempio è un vettore la quadrirelocità definita come

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right), \quad u^\mu u_\mu = 1. \quad (30)$$

Il potenziale vettore quadridimensionale e il quadrivettore corrente sono dati dalle espressioni

$$A_\mu \equiv (\phi, \vec{A}), \quad j_\mu = \rho \frac{dx_\mu}{dt} = (c\rho, \vec{j}) \quad (31)$$

Ovviamente, la quadridivergenza di A_μ

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (32)$$

è un’invariante di Lorentz, così come le equazioni di Maxwell, messe nel formalismo relativistico

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] A_\nu = \frac{4\pi}{c} j_\nu \quad (33)$$

sono covarianti, ovvero sono vere in tutti i sistemi di riferimento, se espresse in termini del potenziale vettore e della quadricorrente trasformata

$$A'_\nu = \Lambda_\nu^\mu A_\mu \quad j'_\nu = \Lambda_\nu^\mu j_\mu. \quad (34)$$

3 Onde elettromagnetiche

Consideriamo il campo elettromagnetico nel vuoto, corrispondente a $\rho = 0$ e $\vec{j} = 0$. In questo caso è conveniente utilizzare una trasformazione di gauge che annulli in

ogni punto dello spazio-tempo il potenziale scalare ϕ , $\phi(\vec{x}, t) = 0$. La prima delle eq. (2) diventa dunque

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (35)$$

Questa equazione dimostra che $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = f(\vec{x})$ è una funzione della sola posizione. Abbiamo dunque ancora la libertà di applicare un'ulteriore trasformazione, che dipende solo dalla posizione ma non dal tempo, e che pertanto lascia il potenziale scalare nullo:

$$\vec{A}'(\vec{x}, t) = A(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \Omega(\vec{x}) \quad \phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) = 0. \quad (36)$$

Scegliendo $\nabla^2 \Omega(\vec{x}) = -f(\vec{x})$ otteniamo dunque la condizione di trasversalità

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0, \quad (37)$$

che deve essere soddisfatta, simultaneamente all'equazione delle onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A}' = 0. \quad (38)$$

Nel seguito ometteremo l'apice per semplicità.

La soluzione dell'equazione delle onde richiede inoltre la conoscenza delle condizioni al bordo, e deve soddisfare la condizione che i campi elettrici e magnetici (e per conseguenza il potenziale vettore) siano reali. Si noti che la condizione (37) non è invariante rispetto a una trasformazione di Lorentz.

Cerchiamo ora le soluzioni dell'equazione delle onde, che soddisfino la condizione di trasversalità (37) nello spazio infinito. Ricordiamo che, essendo l'equazione delle onde lineare nei campi ϕ e \vec{A} , qualunque combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione del problema. Per esempio se \vec{A}_1 e \vec{A}_2 sono soluzioni, lo è anche $\vec{A} = c_1 \vec{A}_1 + c_2 \vec{A}_2$. Inoltre in una dimensione la forma della soluzione deve essere tale che il campo dipenda solo dalle variabili $x_+ = x - ct$ o da $x_- = x + ct$, $\phi(x, t) = f(x_+) + g(x_-)$, ovvero rappresenti un segnale che si propaga alla velocità della luce nella direzione positiva o negativa. In tre dimensioni, la propagazione avviene lungo la direzione definita dal vettore d'onda $\vec{k} \equiv |\vec{k}| \hat{k}$, con $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$. In questo caso $x_+ = \hat{k} \cdot \vec{x} - ct$ e $x_- = \hat{k} \cdot \vec{x} + ct$. Le onde piane sono una soluzione di questo tipo. Infatti scrivendo

$$A_i(\vec{x}, t) = A_i(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (39)$$

e sostituendo questa espressione nella (38), si ottiene

$$\frac{d^2 A_i(\vec{k}, t)}{dt^2} + \omega^2(|k|) A_i(\vec{k}, t) = 0, \quad (40)$$

con $\omega(|k|) = |\vec{k}|c$, la cui soluzione è

$$A_i(\vec{k}, t) = A_i^+(\vec{k}) e^{-i\omega(|k|)t} + A_i^-(\vec{k}) e^{+i\omega(|k|)t}, \quad (41)$$

corrispondente a

$$\begin{aligned}
A_i(\vec{x}, t) &= A_i^+(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(|k|)t)} + A_i^-(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega(|k|)t)} \\
&= A_i^+(\vec{k}) e^{i|\vec{k}|(\hat{k} \cdot \vec{x} - ct)} + A_i^-(\vec{k}) e^{i|\vec{k}|(\hat{k} \cdot \vec{x} + ct)} \\
&= A_i^+(\vec{k}) e^{i|\vec{k}|x_+} + A_i^-(\vec{k}) e^{i|\vec{k}|x_-}.
\end{aligned} \tag{42}$$

La soluzione è completamente definita (dopo aver imposto che sia reale e soddisfi le condizioni di trasversalità) una volta fissati i vettori $\vec{A}^\pm(\vec{k}) \equiv (A_x^\pm(\vec{k}), A_y^\pm(\vec{k}), A_z^\pm(\vec{k}))$. Se vogliamo da esempio un'onda che si propaghi solo nella direzione positiva definita da \hat{k} , basta imporre $\vec{A}^-(\vec{k}) = 0$.

La condizione di trasversalità (37) implica che i vettori \vec{A} e \vec{k} siano ortogonali

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \partial_x [A_x^\pm(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)}] + \partial_y [A_y^\pm(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)}] \\
&+ \partial_z [A_z^\pm(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)}] = i(k_x A_x^\pm(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)} \\
&+ k_y A_y^\pm(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)} + k_z A_z^\pm(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)}) \\
&= \vec{k} \cdot \vec{A}^\pm(\vec{k}) \left[i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Per ogni valore di \vec{k} possiamo costruire una terna ortogonale e decomporre \vec{A} lungo due direzioni ortogonali a \vec{k} . La scelta delle due direzioni, purché indipendenti, è arbitraria. Per esempio, chiamando \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} i versori del sistema di riferimento del laboratorio, possiamo definire

$$\begin{aligned}
\vec{v}^1 &= \hat{x} - (\hat{x} \cdot \hat{k}) \hat{k} & \vec{v}^1 \cdot \vec{k} &= 0 \\
\vec{v}^2 &= \vec{k} \times \vec{v}^1 & \vec{v}^2 \cdot \vec{k} &= 0 & \vec{v}^2 \cdot \vec{v}^1 &= 0 \\
\hat{e}^1(\vec{k}) &= \frac{\vec{v}^1}{|\vec{v}^1|} & \hat{e}^2(\vec{k}) &= \frac{\vec{v}^2}{|\vec{v}^2|},
\end{aligned} \tag{44}$$

ottenendo

$$\hat{e}^{1,2} \cdot \hat{e}^{1,2} = 1 \quad \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad \hat{e}^1 \cdot \hat{e}^2 = 0 \quad \hat{e}^{1,2} \cdot \hat{k} = 0. \tag{45}$$

La condizione di trasversalità implica dunque

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}^\pm(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)} = (A_1^\pm(\vec{k}) \hat{e}^1(\vec{k}) + A_2^\pm(\vec{k}) \hat{e}^2(\vec{k})) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)}, \tag{46}$$

ovvero, scrivendo $\hat{e}^{1,2} \equiv (e_x^{1,2}, e_y^{1,2}, e_z^{1,2})$,

$$A_x(\vec{x}, t) = A_x^\pm(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)} = (A_1^\pm(\vec{k}) e_x^1(\vec{k}) + A_2^\pm(\vec{k}) e_x^2(\vec{k})) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega(|k|)t)}, \tag{47}$$

e similmente per le altre componenti.

La soluzione più generale dell'equazione delle onde si ottiene come combinazione lineare su tutte le armoniche della soluzione in eq. (47), e.g.

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega(|\vec{k}|)} [\vec{A}^+(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(|\vec{k}|)t)} + \vec{A}^-(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega(|\vec{k}|)t)}], \quad (48)$$

dove il fattore $(2\pi)^3 2\omega(|\vec{k}|)$ è stato introdotto per motivi di convenienza.

4 Corpo Nero

Nel caso del corpo nero, consideriamo il caso della radiazione elettromagnetica, confinata in una scatola cubica di lato L ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq z \leq L$), dalle pareti perfettamente riflettenti, all'equilibrio termico alla temperatura T . All'esterno della scatola c'è il vuoto. Questo implica una precisa scelta delle condizioni al contorno cui il campo \vec{A} deve soddisfare.

Consideriamo la superficie indicata in figura 1 e, utilizzando la seconda delle eq. (1), calcoliamo il flusso del vettore $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ attraverso questa superficie

$$\int_{\sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n}_{\sigma} d\sigma = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \vec{B} \cdot \hat{n}_{\sigma} d\sigma, \quad (49)$$

dove \hat{n}_{σ} è il versore ortogonale alla superficie. Nel limite in cui $dx \rightarrow 0$, il flusso del campo magnetico si annulla, essendo il campo una funzione non singolare. D'altro canto, usando il teorema di Stokes, abbiamo che l'integrale di superficie del rotore di \vec{E} è uguale alla circuitazione di \vec{E} lungo il contorno \mathcal{C}_{σ} di σ

$$\int_{\sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n}_{\sigma} d\sigma = \int_{\mathcal{C}_{\sigma}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_y(x+dx) - E_y(x-dx)) l_y = 0. \quad (50)$$

Dunque il campo elettrico parallelo alla superficie deve essere continuo (questo si applica anche alla radiazione che attraversa due mezzi diversi). Essendo il campo elettrico all'esterno della scatola nullo, la condizione (50) implica che il campo elettrico parallelo alla scatola si deve annullare al bordo,. D'altro canto, possiamo integrare il campo magnetico lungo l'asse ortogonale alla superficie da $x-dx$ a $x+dx$, figura 2,

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_x(x+dx) - B_x(x-dx) \sim 2dx \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (51)$$

e dunque il campo magnetico ortogonale alla superficie deve annullarsi, perchè $B_x(x+dx) = 0$. Un campo che soddisfa le condizioni al bordo che abbiamo appena descritto, può essere scritto nella forma:

$$\begin{aligned} A_x(\vec{x}, t) &= Q_x(\vec{s}, t) \psi_x(\vec{s}, \vec{x}) = Q_x(\vec{s}, t) \cos \frac{\pi s_x}{L} x \sin \frac{\pi s_y}{L} y \sin \frac{\pi s_z}{L} z \\ A_y(\vec{x}, t) &= Q_y(\vec{s}, t) \psi_y(\vec{s}, \vec{x}) = Q_y(\vec{s}, t) \sin \frac{\pi s_x}{L} x \cos \frac{\pi s_y}{L} y \sin \frac{\pi s_z}{L} z \\ A_z(\vec{x}, t) &= Q_z(\vec{s}, t) \psi_z(\vec{s}, \vec{x}) = Q_z(\vec{s}, t) \sin \frac{\pi s_x}{L} x \sin \frac{\pi s_y}{L} y \cos \frac{\pi s_z}{L} z, \end{aligned} \quad (52)$$

con

$$\begin{aligned}\vec{k} &\equiv \frac{\pi}{L} \vec{s} = \frac{\pi}{L} (s_x, s_y, s_z), \quad s_{x,y,z} = 1, 2, \dots \\ \vec{Q} &\equiv (Q_x, Q_y, Q_z) \quad \vec{k} \cdot \vec{Q} = 0.\end{aligned}\tag{53}$$

Come discusso precedentemente, \vec{Q} può essere decomposto lungo due componenti ortogonali a \vec{s} (\vec{k}):

$$\vec{Q} = q^1(\vec{s}, t) \hat{e}^1(\vec{s}) + q^2(\vec{s}, t) \hat{e}^2(\vec{s})\tag{54}$$

$$\frac{d^2 q^{1,2}(\vec{s}, t)}{dt^2} + \omega^2(|\vec{s}|) q^{1,2}(\vec{s}, t) = 0 \quad \omega(|\vec{s}|) = \frac{\pi |\vec{s}|}{L} c$$

in analogia con quanto trovato nel caso delle onde piane nello spazio aperto. La soluzione che contiene tutte le armoniche permesse avrà allora la forma

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{s}} \vec{Q}(\vec{s}, \vec{x}, t)\tag{55}$$

dove

$$\mathcal{Q}_i(\vec{s}, \vec{x}, t) \equiv (Q_x(\vec{s}, t) \psi_x(\vec{s}, \vec{x}), Q_y(\vec{s}, t) \psi_y(\vec{s}, \vec{x}), Q_z(\vec{s}, t) \psi_z(\vec{s}, \vec{x}))$$

Dalla soluzione dell'equazione delle onde nella scatola, dalla condizione di ortogonalità delle funzioni ψ

$$\begin{aligned}\int_{Cubo} d^3x \psi_i(\vec{s}, \vec{x}) \psi_j(\vec{s}', \vec{x}) &= \frac{L^3}{8} \delta_{ij} \delta_{s,s'} \\ \left(\int_0^L dt \sin \frac{\pi n}{L} t \sin \frac{\pi k}{L} t = \frac{L}{2} \delta_{nk}, \quad \int_0^L dt \cos \frac{\pi n}{L} t \cos \frac{\pi k}{L} t = \frac{L}{2} \delta_{nk} \right),\end{aligned}\tag{56}$$

e dall'espressione dell'Hamiltoniana del campo elettromagnetico

$$\mathcal{H} = \int_{Cubo} \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi},\tag{57}$$

si ottiene

$$\mathcal{H} = \frac{V}{64\pi c^2} \sum_{\vec{s}} \left[\left(\frac{dq^1(\vec{s}, t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dq^2(\vec{s}, t)}{dt} \right)^2 + \omega^2(|\vec{s}|) (q^1(\vec{s}, t)^2 + q^2(\vec{s}, t)^2) \right],\tag{58}$$

dove $V = L^3$. Questa è l'Hamiltoniana di un sistema di oscillatori armonici, tanti quanti sono i vettori d'onda \vec{s} che possiamo definire, per un fattore 2, corrispondente alle due polarizzazioni del campo elettromagnetico.

Possiamo ora contare quanti gradi di libertà, ΔN , ci sono in un intervallo di frequenze compreso tra ω e $\omega + \Delta\omega$, corrispondente agli intervalli da s_i a $s_i + \Delta s_i$

$$\Delta N = 2 \Delta s_x \Delta s_y \Delta s_z.$$

Nel limite di vettori d'onda sempre più fitti

$$\Delta N = 2 \left(\frac{L}{\pi} \right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \rightarrow dN = 2 \left(\frac{L}{\pi} \right)^3 dk_x dk_y dk_z = 2 \left(\frac{L}{\pi} \right)^3 d^3 k \quad (59)$$

dove le componenti del vettore k sono tutte positive $k_i \geq 0$. Se vogliamo sommare anche sulle componenti negative dobbiamo dividere per un fattore 8 (ovvero 2^3 poiché siamo in 3 dimensioni). Passando in coordinate sferiche, e ricordando che la frequenza è proporzionale al raggio, $\omega = |\vec{k}| c = \kappa c$, otteniamo

$$dN = 2 \frac{V}{\pi^3} \frac{1}{8} 4\pi \kappa^2 d\kappa = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega. \quad (60)$$

Il teorema di equipartizione dell'energia, afferma che l'energia interna E di un sistema all'equilibrio termico alla temperatura T , la cui Hamiltoniana dipenda quadraticamente dai gradi di libertà, è proporzionale al numero di gradi di libertà f che appaiono nell'Hamiltoniana

$$E = \frac{f}{2} KT,$$

con $K = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg}/^\circ K$. Nel caso della radiazione elettromagnetica, per ogni vettore d'onda, e polarizzazione, $f = 2$, abbiamo dunque

$$dE = KT dN = KT \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega,$$

da cui possiamo ricavare la densità di energia per unità di volume

$$dU = u(\omega) d\omega = KT \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \quad (61)$$

Questa formula porta a una conclusione assurda: integrando su tutte le frequenze permesse ($0 \leq \omega \leq \infty$), la densità di energia del corpo nero diverge quadraticamente, mentre era nota la relazione di Wien

$$U = \sigma T^4 \quad \sigma = 7.64 \times 10^{-15} \text{ erg}/\text{cm}^3/^\circ K^4. \quad (62)$$

La soluzione empirica a questo problema fu trovata da Planck con una formula che conciliava l'andamento della densità di energia a basse frequenze, compatibile con il teorema di equipartizione, con la decrescita esponenziale ($dU \sim \exp(-g\omega)$) osservata sperimentalmente a grandi frequenze

$$dU = u(\omega) d\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} d\omega, \quad (63)$$

dove il valore empirico della costante di Plack è dato da $\hbar = 1.05 \times 10^{-27} \text{ erg sec}$. Il parametro fondamentale nella formula di Planck è la quantità adimensionale $\theta = \hbar\omega/KT$ che misura il rapporto tra l'energia associata alla frequenza ($\hbar\omega$) e

la tipica energia termica per grado di libertà (KT): in fisica dire che un'energia è grande o piccola non ha senso, solo il rapporto rispetto a una scala di riferimento può dare significato alla nozione di piccolo o grande. Dunque l'energia vibrazionale è molto grande o molto piccola rispetto a quella termica quando $\theta \ll 1$ o $\theta \gg 1$.

In termini di θ la distribuzione di Planck si scrive

$$dU = u(\theta) d\theta = \frac{(KT)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \frac{1}{e^\theta - 1} \theta^3 d\theta, \quad (64)$$

- Nel limite $\theta \rightarrow 0$, usando $e^\theta - 1 \rightarrow \theta + \mathcal{O}(\theta^2)$, otteniamo

$$dU = KT \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega, \quad (65)$$

in accordo con il principio di equipartizione dell'energia. Si noti che questo corrisponde a grandi temperature o basse frequenze, ma anche al limite “classico” $\hbar \rightarrow 0$;

- Nel limite $\theta \rightarrow \infty$ (piccole temperature o grandi frequenze), ovvero per valori di $\theta \gg 1$, $e^\theta - 1 \rightarrow e^\theta [1 + \mathcal{O}(e^{-\theta})]$ e dunque

$$dU = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar \omega}{KT}} d\omega, \quad (66)$$

in accordo con gli esperimenti;

- L'esponenziale smorza molto velocemente la densità di energia a valori grandi di θ , dunque possiamo tranquillamente integrare su tutte le frequenze utilizzando la relazione

$$I_3 = \int d\theta \frac{\theta^3}{e^\theta - 1} = \frac{\pi^2}{15}, \quad (67)$$

ottenendo così

$$U = \frac{(KT)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \frac{\pi^2}{15} = \sigma T^4, \quad (68)$$

in accordo con la formula di Wien.

References

- [1] Goldstein, Meccanica Classica
- [2] Landau-Lifchitz Teoria dei Campi
- [3] R. Feynman Lectures on Physics Vol. 2